第八章　一元二次方程

1　一元二次方程

刷基础

1. C　【解析】$x^3-2x^2-3=0$ 中未知数的最高次数是3，不是一元二次方程，故选项A错误；$x-\frac{1}{x}=1$ 不是整式方程，故选项B错误；$x^2+x-2=0$ 符合一元二次方程的定义，故选项C符合题意；$xy+1=0$ 中含有两个未知数，故选项D错误. 故选C.

2.【解】(1) ∵ 方程 $(m^2-3)x^2+(m-\sqrt{3})x+2=0$ 是一元一次方程，∴ $m^2-3=0$，且 $m-\sqrt{3}\neq 0$，∴ $m=-\sqrt{3}$.

(2) ∵ 方程 $(m^2-3)x^2+(m-\sqrt{3})x+2=0$ 是一元二次方程，∴ $m^2-3\neq 0$，∴ $m\neq\pm\sqrt{3}$.

3. C　【解析】方程整理得 $9x^2-8x-2=0$，则二次项、一次项、常数项分别为 $9x^2$，$-8x$，-2. 故选C.

4. A　【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-(4+m)x+3m=0$ 的常数项是 -6，∴ $3m=-6$，∴ $m=-2$，∴ $-(4+m)=-(4-2)=-2$，∴ 一次项为 $-2x$. 故选A.

5. 1　【解析】将一元二次方程 $x(x-1)=-1$ 化成一般形式 $ax^2+bx+c=0(a>0)$ 之后，变为 $x^2-x+1=0$，故 $a=1$，$b=-1$，$c=1$，∴ $a+b+c=1-1+1=1$. 故答案为1.

6. B　【解析】根据题意，得 $\frac{1}{2}x(x-1)=36$. 故选B.

7. $(60-2x)(22-2x)=600$　【解析】∵ 矩形场地 $ABCD$ 的长为60 m，宽为22 m，且两侧是宽 x m的道路，中间是宽 $2x$ m的道路，∴ 停车位所在区域可合成长为 $(60-2x)$ m，宽为 $(22-2x)$ m的矩形. 根据题意得 $(60-2x)(22-2x)=600$. 故答案为 $(60-2x)(22-2x)=600$.

8. C　【解析】当 $x=0$ 时，$x^2+2x-4=-4$；当 $x=1$ 时，$x^2+2x-4=-1$；当 $x=2$ 时，$x^2+2x-4=4$. 所以一元二次方程 $x^2+2x-4=0$ 的一个解的范围为 $1<x<2$. 故选C.

9. 1.7　【解析】由表格可知，$x=1.6$ 时，$x^2-x-1.1$ 取值为 -0.14；$x=1.7$ 时，$x^2-x-1.1$ 取值为0.09，所以方程的一个近似解在1.6与1.7之间. 因为需要精确到0.1，而0.09比 -0.14 更接近0，所以最精确的一个近似解是1.7.

易错警示 ①确定各项时需先将一元二次方程化为一般形式；②注意一元二次方程的二次项系数不能为0.

刷有所得 一元二次方程必须满足四个条件：(1)未知数的最高次数是2；(2)二次项系数不为0；(3)是整式方程；(4)只含有一个未知数.

刷易错

10. D　【解析】$(m-3)x^2+m^2x=9x+5$，化为一般形式为 $(m-3)x^2+(m^2-9)x-5=0$. 由题意，得 $m-3\neq 0$，且 $m^2-9=0$，解得 $m=-3$. 故选D.

刷提升

1. D　【解析】选项A整理得 $2x^3-3x^2+6x+a-3=0$，最高次数为3，故不符合题意；选项B中当 $a\neq 0$ 时是一元二次方程，当 $a=0$ 时不是一元二次方程，故不符合题意；选项C整理得 $(a-1)x^2+x+1=0$，当 $a\neq 1$ 时是一元二次方程，当 $a=1$ 时不是一元二次方程，故不符合题意；选项D中无论 a 为何值，$3a^2+4\neq 0$，是一元二次方程，故符合题意. 故选D.

2. B　【解析】∵ x_1 是方程 $ax^2+2x+c=0(a\neq 0)$ 的一个根，∴ $ax_1^2+2x_1+c=0$，即 $ax_1^2+2x_1=-c$，∴ $M-N=(ax_1+1)^2-(2-ac)=a^2x_1^2+2ax_1+1-2+ac=a(ax_1^2+2x_1)+ac-1=-ac+ac-1=-1$. ∵ $-1<0$，∴ $M-N<0$，∴ $M<N$. 故选B.

3. 1　【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $(a+1)x^2-2x+a^2-1=0$ 有一个根为 $x=0$，∴ $a^2-1=0$ 且 $a+1\neq 0$，解得 $a=1$. 故答案为1.

4. 1.65　【解析】因为 $6-5.9696=0.0304$，$6.0225-6=0.0225$，$0.0304>0.0225$，所以6.0225比5.9696更逼近6，所以当精确度为0.01时，方程 $x^2+2x=6$ 的一个解的近似值是1.65. 故答案为1.65.

5.【解】(1) ∵ $1+(-1)=0$，$3+(-3)=0$，∴ 方程 $x^2+2x+3=0$ 的“对称方程”是 $-x^2+2x-3=0$. 故答案为 $-x^2+2x-3=0$.

(2) $-8x^2-x=1$，移项可得 $-8x^2-x-1=0$.

∵ 方程 $8x^2+(m-3)x-n=0$ 与 $-8x^2-x-1=0$ 互为“对称方程”，∴ $m-3=-1$，$-n+(-1)=0$，解得 $m=2$，$n=-1$，∴ $(m+n)^2=(2-1)^2=1$.

刷素养

6.【解】(1) 由题意得 $y=-x$，所以 $x=-y$. 把 $x=-y$ 代入已知方程，得 $(-y)^2+(-y)-2=0$. 化简得 $y^2-y-2=0$，故所求方程为 $y^2-y-2=0$. 故答案为 $y^2-y-2=0$.

(2) 由题意得 $y=\frac{1}{x}$，所以 $x=\frac{1}{y}$. 把 $x=\frac{1}{y}$ 代入已知方程，得 $2\left(\frac{1}{y}\right)^2-7\cdot\frac{1}{y}+3=0$. 化简得 $3y^2-7y+2=0$，即所求方程为 $3y^2-7y+2=0$.

2 用配方法解一元二次方程

课时 1 用配方法解二次项系数为 1 的一元二次方程

刷基础

1. A 【解析】$4x^2-4x+1=c-4$ 可变形为 $(2x-1)^2=c-4$. ∵ 关于 x 的一元二次方程 $4x^2-4x+1=c-4$ 可以用直接开平方法求解，∴ $c-4\geqslant0$，∴ $c\geqslant4$. 故选 A.

2. C 【解析】由题意知，方程 $ax^2=1(a>0)$ 的两根互为相反数，∴ $m+1+2m-4=0$，解得 $m=1$，∴ $m+1=2$，$2m-4=-2$. 故选 C.

3. $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 【解析】$3x^2=4$，$x^2=\frac{4}{3}$，∴ $x=\pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$，∴ $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 故答案为 $x_1=\frac{2\sqrt{3}}{3}$，$x_2=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

4. 【解】(1) 方程两边开平方得 $x+5=\pm5$，即 $x+5=5$ 或 $x+5=-5$，解得 $x_1=0$，$x_2=-10$.

(2) 原方程可变形为 $(2x+1)^2=1$. 方程两边开平方得 $2x+1=\pm1$，解得 $x_1=0$，$x_2=-1$.

(3) 原方程变形为 $(x+2)^2=9$，所以 $x+2=3$ 或 $x+2=-3$，解得 $x_1=1$，$x_2=-5$.

5. C 【解析】$x^2-8x-7=-5$，$x^2-8x=-5+7$，$x^2-8x+16=-5+7+16$，$(x-4)^2=18$，故选 C.

6. D 【解析】$x^2-4x+m=0$，$x^2-4x=-m$，$x^2-4x+4=4-m$，$(x-2)^2=4-m$，∴ $n=2$，$4-m=1$，解得 $m=3$，∴ $m+n=3+2=5$. 故选 D.

7. 13 【解析】$x^2-8x+12=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=6$. ∵ $2+2<5$，$2+5>6$，∴ 三角形的第三边长是 6，∴ 该三角形的周长为 $2+5+6=13$. 故答案为 13.

8. $x_1=2\ 025$，$x_2=-2\ 023$ 【解析】$x^2-2x-4\ 096\ 575=0$，则 $x^2-2x=4\ 096\ 575$，∴ $x^2-2x+1=4\ 096\ 575+1$，∴ $(x-1)^2=4\ 096\ 576$，∴ $x-1=\pm2\ 024$，∴ $x_1=2\ 025$，$x_2=-2\ 023$，故答案为 $x_1=2\ 025$，$x_2=-2\ 023$.

9. 【解】(1) 移项和配方，得 $x^2+4x+4=10$，即 $(x+2)^2=10$，所以 $x_1=-2+\sqrt{10}$，$x_2=-2-\sqrt{10}$.

(2) 配方，得 $x^2-2x+1=9$，

即 $(x-1)^2=9$，所以 $x_1=4$，$x_2=-2$.

10. 【解】由题意可知，小明解的方程是 $x^2+4x+c+1=0$，把 $x=-1$ 代入方程 $x^2+4x+c+1=0$，可得 $1-4+c+1=0$，解得 $c=2$，∴ 原方程为 $x^2+4x+2=0$，方程两边同时加 2 可得 $x^2+4x+4=2$，则 $(x+2)^2=2$，两边同时开平方可得 $x+2=\pm\sqrt{2}$，∴ $x+2=\sqrt{2}$ 或 $x+2=-\sqrt{2}$，解得 $x_1=\sqrt{2}-2$，$x_2=-\sqrt{2}-2$.

刷易错

易错警示 注意本题中方程两边同时开平方，会有两种情况：被开方数相等和被开方数互为相反数. 在用直接开平方法解方程时，切记不要漏解.

11. 【解】(1) 题中解方程的过程中从第一步开始出现错误，错误的原因是开平方时，忽略被开方数互为相反数的情况. 故答案为一；开平方时，忽略被开方数互为相反数的情况.

(2) 直接开平方，得 $y+2=3y-1$ 或 $y+2=-(3y-1)$，解得 $y_1=\frac{3}{2}$，$y_2=-\frac{1}{4}$.

课时 2 用配方法解二次项系数不为 1 的一元二次方程

刷基础

关键点拨 先将二次项系数化为 1，再将常数项移到等号的右边，然后等号两边都加上一次项系数一半的平方即可配成完全平方式.

1. D 【解析】$4x^2-2x-1=0$，$x^2-\frac{1}{2}x=\frac{1}{4}$，$x^2-\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2$，$\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{5}{16}$. 故选 D.

2. B 【解析】∵ $3x^2+6x-1=0$，∴ $3x^2+6x=1$，$x^2+2x=\frac{1}{3}$，则 $x^2+2x+1=\frac{1}{3}+1$，即 $(x+1)^2=\frac{4}{3}$，∴ $a=1$，$b=\frac{4}{3}$，∴ $a+b=\frac{7}{3}$. 故选 B.

3. A 【解析】由两人的解题过程可知两人的解法都正确. 故选 A.

4. 1 【解析】$3x^2-6x=48$，方程两边同时除以 3 得 $x^2-2x=16$，方程两边同时加上 1 得 $x^2-2x+1=17$. 故答案为 1.

5. 二 【解析】∵ 方程 $2x^2+8x-32=0$ 可以配方成 $(x+2)^2-20=0$，∴ $p=2$，$q=-20$. 把 $p=2$，$q=-20$ 代入 $y=px+q$，得 $y=2x-20$，此直线经过第一、三、四象限，不经过第二象限. 故答案为二.

6. 【解】(1) 方程整理得 $x^2-2x=6$，配方得 $x^2-2x+1=7$，即 $(x-1)^2=7$，开平方得 $x-1=\pm\sqrt{7}$，解得 $x_1=1+\sqrt{7}$，$x_2=1-\sqrt{7}$.

(2) 二次项系数化为 1，得 $x^2+\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}=0$，移项，得 $x^2+\frac{2}{3}x=\frac{1}{3}$，配方，得 $x^2+\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$，即 $\left(x+\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$，开平方，得 $x+\frac{1}{3}=\pm\frac{2}{3}$，解得 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=-1$.

(3) 二次项系数化为 1，得 $t^2-2t=\frac{1}{4}$. 配方，得

$t^2-2t+1=\frac{1}{4}+1$，即$(t-1)^2=\frac{5}{4}$. 开平方，得 $t-1=\pm\frac{\sqrt{5}}{2}$，解得 $t_1=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$，$t_2=1-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

(4)去括号、移项、合并同类项，得 $2x^2-x=4$. 二次项系数化为 1，得 $x^2-\frac{1}{2}x=2$. 配方，得 $x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{16}=2+\frac{1}{16}$，即 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{33}{16}$. 开平方，得 $x-\frac{1}{4}=\pm\frac{\sqrt{33}}{4}$，解得 $x_1=\frac{1+\sqrt{33}}{4}$，$x_2=\frac{1-\sqrt{33}}{4}$.

7.【解】根据题意可得 $h=20t-\frac{1}{2}\times10t^2=-5t^2+20t$，∴ 当这种爆竹离地面的高度为 15 m 时，

$-5t^2+20t=15$，

整理，得 $t^2-4t=-3$，

配方，得 $t^2-4t+(-2)^2=-3+(-2)^2$，

∴ $(t-2)^2=1$，

解得 $t_1=1$，$t_2=3$.

故这种爆竹在地面上点燃后，经过 1 s 或 3 s 离地面的高度为 15 m.

刷易错

8.【解】(1)题中解方程的过程中，从第①步开始出现了错误. 故答案为①.

(2)$2x^2-8x=-3$，二次项系数化为 1，得 $x^2-4x=-\frac{3}{2}$，配方，得 $x^2-4x+4=-\frac{3}{2}+4$，即$(x-2)^2=\frac{5}{2}$，开平方，得 $x-2=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$，解得 $x_1=2+\frac{\sqrt{10}}{2}$，$x_2=2-\frac{\sqrt{10}}{2}$.

易错警示 用配方法解二次项系数不为 1 的一元二次方程，将二次项系数化为 1 时，各项都要除以二次项的系数，不要漏项.

刷提升

1. A 【解析】当 $x>0$ 时，$\max\{x,-x\}=x=\frac{x^2-2x-1}{2}$，整理，得 $x^2-4x=1$，配方，得 $x^2-4x+4=1+4$，即$(x-2)^2=5$，直接开平方，得 $x-2=\pm\sqrt{5}$，解得 $x_1=2+\sqrt{5}$，$x_2=2-\sqrt{5}$(不合题意，舍去)；当 $x<0$ 时，$\max\{x,-x\}=-x=\frac{x^2-2x-1}{2}$，整理，得 $x^2=1$，解得 $x_1=-1$，$x_2=1$(不合题意，舍去). 综上，$x=\sqrt{5}+2$ 或 $x=-1$，故只有甲的答案对. 故选 A.

思路分析 根据题意分以下两种情况讨论：当 $x>0$ 时；当 $x<0$ 时，分别列方程求解即可.

2. $2\pm\sqrt{3}$ 【解析】∵ 原式$=(3x)^2\pm2\times3x\times3\sqrt{2n}+(3\sqrt{2n})^2=(3x\pm3\sqrt{2n})^2$，∴ $\pm18\sqrt{2n}=18(n-1)$，即$(n-1)^2=2n$，∴ $n^2-4n+1=0$，则 $n^2-4n+4-4+1=0$，即$(n-2)^2=3$，∴ $n-2=\pm\sqrt{3}$，∴ $n=2\pm\sqrt{3}$. 故答案为 $2\pm\sqrt{3}$.

3. B 【解析】$a^2+4b^2+8a-12b+26=(a+4)^2-16+(2b-3)^2-9+26=(a+4)^2+(2b-3)^2+1$. ∵ $(a+4)^2\geqslant0$，$(2b-3)^2\geqslant0$，∴ $a^2+4b^2+8a-12b+26\geqslant1$. 故选 B.

4. $P<Q$ 【解析】$Q-P=(m^2-5m+4)-(-m^2-m+1)=m^2-5m+4+m^2+m-1=2m^2-4m+3=2(m-1)^2+1$. ∵ $(m-1)^2\geqslant0$，∴ $2(m-1)^2+1>0$，∴ $Q-P>0$，∴ $P<Q$，故答案为 $P<Q$.

5. 等边 【解析】∵ $a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca=0$，∴ $2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca=0$，∴ $(a^2-2ab+b^2)+(b^2-2bc+c^2)+(c^2-2ca+a^2)=0$，∴ $(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，∴ $a-b=0$，$b-c=0$，$c-a=0$，∴ $a=b=c$，∴ $\triangle ABC$ 是等边三角形.

6.【解】(1)$-x^2+4x-1=-(x^2-4x)-1=-(x^2-4x+4-4)-1=-(x-2)^2+4-1=-(x-2)^2+3$. ∵ $-(x-2)^2\leqslant0$，∴ $-(x-2)^2+3\leqslant3$，∴ $-(x-2)^2+3$ 的最大值为 3，∴ $-x^2+4x-1$ 的最大值为 3. 故答案为 3.

(2)$m^2+n^2+6m-4n+15=(m^2+6m+9)+(n^2-4n+4)+2=(m+3)^2+(n-2)^2+2$. ∵ $(m+3)^2\geqslant0$，$(n-2)^2\geqslant0$，∴ $(m+3)^2+(n-2)^2+2\geqslant2$，∴ $(m+3)^2+(n-2)^2+2$ 的最小值为 2，∴ $m^2+n^2+6m-4n+15$ 的最小值为 2.

刷素养

7.【解】(1)由题意，得 $a=\frac{1}{2}\times(5+9)=7$，$b=7-5=2$，则原方程可变形为$[(x+7)-2][(x+7)+2]=5$，∴ $(x+7)^2-2^2=5$，∴ $(x+7)^2=5+2^2$，解得 $x_1=-4$，$x_2=-10$. ∵ $c>d$，∴ $c=-4$，$d=-10$. 故答案为 7，2，−4，−10.

(2)原方程可变形为$[(x+1)-6][(x+1)+6]=12$，∴ $(x+1)^2-6^2=12$，∴ $(x+1)^2=48$，解得 $x_1=-1+4\sqrt{3}$，$x_2=-1-4\sqrt{3}$.

3 用公式法解一元二次方程

刷基础

1. B 【解析】由题意得，$a=2$，$b=-3$，$c=-1$，∴ 该一元二次方程为 $2x^2-3x-1=0$，故选 B.

2. 64 【解析】∵ $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x=2\sqrt{2}$，∴ $\sqrt{2}x^2+4\sqrt{3}x-2\sqrt{2}=0$，∴ $a=\sqrt{2}$，$b=4\sqrt{3}$，$c=-2\sqrt{2}$，∴ $b^2-4ac=(4\sqrt{3})^2-4\times\sqrt{2}\times(-2\sqrt{2})=64$. 故答案为 64.

3. A 【解析】$2x^2-4x-1=0$，$\Delta=(-4)^2-4\times2\times$

$(-1)=24$，∴ $x=\frac{4\pm\sqrt{24}}{2\times2}=\frac{2\pm\sqrt{6}}{2}$. ∵ 一元二次方程 $2x^2-4x-1=0$ 的两个根分别为 a,b，且 $a>b$，∴ a 的值为 $\frac{2+\sqrt{6}}{2}$. 故选 A.

4. $-3+\sqrt{11}$ 或 $-3-\sqrt{11}$ 【解析】根据题意，得 $x^2+6x+3=5$，即 $x^2+6x-2=0$. ∵ $a=1,b=6,c=-2$，∴ $b^2-4ac=36-4\times1\times(-2)=44>0$，则 $x=\frac{-6\pm2\sqrt{11}}{2}=-3\pm\sqrt{11}$. 故答案为 $-3+\sqrt{11}$ 或 $-3-\sqrt{11}$.

5. 【解】(1) ∵ $a=1,b=1,c=-2$，∴ $b^2-4ac=1-4\times1\times(-2)=9>0$，∴ $x=\frac{-1\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{-1\pm3}{2}$，∴ $x_1=1$，$x_2=-2$.

(2) ∵ $3x^2-6x=4$，∴ $3x^2-6x-4=0$. ∵ $a=3$，$b=-6,c=-4$，∴ $b^2-4ac=(-6)^2-4\times3\times(-4)=84>0$，∴ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-(-6)\pm\sqrt{84}}{2\times3}=\frac{6\pm2\sqrt{21}}{2\times3}=\frac{3\pm\sqrt{21}}{3}$，即 $x_1=\frac{3+\sqrt{21}}{3}$，$x_2=\frac{3-\sqrt{21}}{3}$.

(3) 原方程可化为 $x^2-9x+2=0$. ∵ $a=1,b=-9,c=2$，∴ $b^2-4ac=(-9)^2-4\times1\times2=73>0$，∴ $x=\frac{9\pm\sqrt{73}}{2}$，∴ $x_1=\frac{9+\sqrt{73}}{2}$，$x_2=\frac{9-\sqrt{73}}{2}$.

▶**归纳总结** 用公式法解一元二次方程的一般步骤：①把方程化成一般形式，进而确定 a,b,c 的值（注意符号）；②求出 b^2-4ac 的值（若 $b^2-4ac<0$，方程无实数根）；③在 $b^2-4ac\geqslant0$ 的前提下，把 a,b,c 的值代入公式进行计算，求出方程的根.

6. A 【解析】∵ $b^2-4ac=(-5)^2-4\times2\times6=25-48=-23<0$，∴ $2x^2-5x+6=0$ 无实数根. 故选 A.

7. B 【解析】当 $k-2=0$，即 $k=2$ 时，方程为 $-2x+1=0$，解得 $x=\frac{1}{2}$；当 $k-2\neq0$ 时，根据题意得 $b^2-4ac=(-2)^2-4(k-2)\geqslant0$，解得 $k\leqslant3$ 且 $k\neq2$. 综上所述，k 的取值范围为 $k\leqslant3$.

8. D 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 是菱形，∴ $AB=BC$. ∵ AB,BC 的长是关于 x 的一元二次方程 $4x^2-4mx+2m=1$ 的两个实数根，∴ 一元二次方程 $4x^2-4mx+2m=1$ 有两个相等的实数根. 将 $4x^2-4mx+2m=1$ 变形为 $4x^2-4mx+2m-1=0$，则 $\Delta=b^2-4ac=(-4m)^2-4\times4\times(2m-1)=0$，即 $m^2-2m+1=0$，解得 $m_1=m_2=1$. 故选 D.

▶**思路分析** 根据菱形的性质可知 $AB=BC$，利用根的判别式 $\Delta=0$ 可求出 m 的值.

9. $kx^2+4kx-k=0(k\neq0)$（答案不唯一） 【解析】∵ 方程必须有两个不相等的实数根，∴ $\Delta>0$. 又∵ 二次项系数为 k，∴ 不妨令 $b=4k$，$c=-k$，∴ 满足条件的这个一元二次方程可以是 $kx^2+4kx-k=0(k\neq0)$. 故答案为 $kx^2+4kx-k=0$ $(k\neq0)$（答案不唯一）.

10. (1)【解】$\Delta=b^2-4ac=[-3(m-1)]^2-4m(2m-3)=(m-3)^2$. ∵ 一元二次方程有两个不相等的实数根，∴ $(m-3)^2>0$ 且 $m\neq0$，∴ $m\neq3$ 且 $m\neq0$，∴ m 的取值范围是 $m\neq3$ 且 $m\neq0$.

(2)【证明】由求根公式得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{3(m-1)\pm(m-3)}{2m}$，∴ $x_1=\frac{3m-3+m-3}{2m}=\frac{2m-3}{m}=2-\frac{3}{m}$，$x_2=\frac{3m-3-m+3}{2m}=1$，∴ 无论 m 为何值，方程总有一个固定的根.

刷提升

1. B 【解析】把 $x=-2$ 代入 $2ax^2+bx+2=0$ 得 $8a-2b+2=0$，∴ $b=4a+1$. 把 $b=4a+1$ 代入方程 $2ax^2-bx+2=0$ 得 $2ax^2-(4a+1)x+2=0$. ∵ $\Delta=(4a+1)^2-4\times2a\times2=(4a-1)^2\geqslant0$，∴ 方程 $2ax^2-bx+2=0(a\neq0)$ 有两个实数根. 故选 B.

2. B 【解析】∵ $ax^2+bx-1=0$，∴ $\Delta=b^2+4a$. 若 a,b 同号，令 $a=-1,b=-1$，此时 $\Delta=1-4=-3<0$，方程没有实数根，∴ 甲错误；若 $a-b-1=0$，即 $a=b+1$，∴ $\Delta=b^2+4(b+1)=(b+2)^2\geqslant0$，方程总有实数根，∴ 乙正确；若 $a+b-1=0$，即 $a=-b+1$，∴ $\Delta=b^2+4(-b+1)=(b-2)^2\geqslant0$，方程总有实数根，∴ 丙正确，故选 B.

3. A 【解析】∵ 四边形 $ABCD$ 为矩形，∴ $\angle BAD=90°$. ∵ $AB=a$，$AD=b$，∴ $BD=\sqrt{a^2+b^2}$. 由作法得 $BF=a$，$DE=b$，∴ $DF=\sqrt{a^2+b^2}-a$，$BE=\sqrt{a^2+b^2}-b$. 解方程 $x^2+2ax=b^2$ 得 $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}-a$，故 A 符合题意；解方程 $x^2-2ax=b^2$ 得 $x=\pm\sqrt{a^2+b^2}+a$，故 B 不符合题意；解方程 $x^2+bx=a^2$ 得 $x=\pm\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}-\frac{1}{2}b$，故 C 不符合题意；解方程 $x^2-bx=a^2$ 得 $x=\pm\sqrt{a^2+\frac{1}{4}b^2}+\frac{1}{2}b$，故 D 不符合题意. 故选 A.

4. $\frac{1-\sqrt{17}}{2}$ 【解析】根据题意，得 $x^2+x-(2x-1)=5$，整理，得 $x^2-x-4=0$. ∵ $a=1,b=-1$，$c=-4$，∴ $\Delta=(-1)^2-4\times1\times(-4)=17>0$，则 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$，∴ $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$，$x_2=$

$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$. ∵ 点 A 在数轴的负半轴上，∴ $2x-1<0$，即 $x<\frac{1}{2}$，∴ $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$. 故答案为$\frac{1-\sqrt{17}}{2}$.

5. 2 或 6 或 12 【解析】∵ $a=1,b=-(2m-1)$，$c=m^2-2m$，∴ $\Delta=b^2-4ac=[-(2m-1)]^2-4\times1\times(m^2-2m)=4m^2-4m+1-4m^2+8m=4m+1$，∴ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{2m-1\pm\sqrt{4m+1}}{2}$. ∵ $0<m<13$，∴ $1<4m+1<53$. ∵ 一元二次方程的根为有理数，∴ $\sqrt{4m+1}$ 为有理数. ∵ m 为整数，∴ $4m+1=9$ 或 25 或 49，∴ $m=2$ 或 6 或 12. 故答案为 2 或 6 或 12.

思路分析 根据一元二次方程的求根公式，求出方程的根，再根据方程的根为有理数和整数 m 的取值范围，进行解答即可.

6. (1)【证明】当 $k=1$ 时，方程为一元一次方程，必有实数根. 当 $k\neq1$ 时，方程为一元二次方程，$k^2-4(k-1)=(k-2)^2\geqslant0$，∴ 一元二次方程有两个实数根. 综上，不论 k 取什么实数值，这个方程总有实数根.

(2)【解】∵ 方程 $(k-1)x^2+kx+1=0$ 有两个整数根，∴ 方程为一元二次方程，即 $k\neq1$. 解 $(k-1)x^2+kx+1=0$，得 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4(k-1)}}{2(k-1)}$，则 $x=-1$ 或 $x=\frac{1}{1-k}$.

又∵ k 为整数，∴ $1-k=1$ 或 -1，∴ $k=0$ 或 2.

注意 当给出的方程没有说明为一元二次方程时，注意讨论二次项系数是不是 0.

刷素养

7.【解】(1) ∵ $k=100a+10b+c$ 是“喜鹊数”，∴ $b^2=4ac$，即 $b^2-4ac=0$. ∵ $4^2=16$，$4\times2\times1=8$，$16\neq8$，∴ 241 不是“喜鹊数”. 故答案为 $b^2-4ac=0$，不是.

(2) ∵ $x=m$ 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，$x=n$ 是一元二次方程 $cx^2+bx+a=0$ 的一个根，∴ $am^2+bm+c=0$，$cn^2+bn+a=0$，$n\neq0$. 将 $cn^2+bn+a=0$ 两边同除以 n^2 得 $a\left(\frac{1}{n}\right)^2+b\cdot\frac{1}{n}+c=0$，∴ 可将 m，$\frac{1}{n}$看成是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的两个根. ∵ $b^2-4ac=0$，∴ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 有两个相等的实数根，∴ $m=\frac{1}{n}$，即 $mn=1$.

(3) ∵ $m+n=-2$，$mn=1$，∴ $m=-1$，$n=-1$，∴ $a-b+c=0$，∴ $b=a+c$. ∵ $b^2=4ac$，∴ $(a+c)^2=4ac$，解得 $a=c$，∴ 满足条件的所有 k 的值为 121，242，363，484.

4 用因式分解法解一元二次方程

刷基础

1. D 【解析】由题可知，体现的数学思想是转化思想. 故选 D.

2. A 【解析】用因式分解法解一元二次方程时，方程的右边为 0，才可以达到化为两个一元一次方程的目的，B、C 选项错误；D 选项应该是由 $x(x+2)=0$，得 $x=0$ 或 $x+2=0$. 综上，A 选项正确. 故选 A.

3. C 【解析】$x^2+5x=0$，$x(x+5)=0$，$x=0$ 或 $x+5=0$，解得 $x=0$ 或 -5. ∵ m 是方程 $x^2+5x=0$ 的一个较大的根，∴ $m=0$. 解方程 $x^2-x-6=0$ 得 $x=3$ 或 -2. ∵ n 是方程 $x^2-x-6=0$ 的一个较小的根，∴ $n=-2$，∴ $m+n=0+(-2)=-2$. 故选 C.

4. A 【解析】原方程变形为 $2(x+1)^2=2\times3+x-2$，整理得 $2x^2+3x-2=0$，因式分解，得 $(2x-1)(x+2)=0$，解得 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_2=-2$，故选 A.

5. D 【解析】原方程可变形为 $x(x-3)-4(x-3)=0$，则 $(x-3)(x-4)=0$，∴ $x-3=0$ 或 $x-4=0$，解得 $x_1=3$，$x_2=4$，∴ 直角三角形两条直角边的长分别为 3，4，∴ 斜边的长为$\sqrt{3^2+4^2}=5$，∴ 该直角三角形斜边上的中线长为 2. 5. 故选 D.

6. $x_1=2$，$x_2=-1$ 【解析】移项得 $(x-2)^2-3x(x-2)=0$，∴ $(x-2)(x-2-3x)=0$，即 $-2(x-2)\cdot(x+1)=0$，则 $x-2=0$ 或 $x+1=0$，解得 $x_1=2$，$x_2=-1$. 故答案为 $x_1=2$，$x_2=-1$.

易错警示 方程两边都含有代数式 $x-2$，不能直接消掉. 因为当 $x-2=0$，即 $x=2$ 时，等号也成立，故 $x=2$ 也是一元二次方程的根. 应移项后再选择合适的方法解一元二次方程.

7. -1 【解析】把 $x=1$ 代入方程得 $a-2+4-a^2=0$，即 $a^2-a-2=0$，则 $(a-2)(a+1)=0$，解得 $a=2$ 或 $a=-1$. ∵ $a-2\neq0$，∴ $a\neq2$，∴ $a=-1$. 故答案为 -1.

8.【解】(1) $(x+2)^2=3x+6$，$(x+2)^2-3(x+2)=0$，$(x+2)(x+2-3)=0$，则 $x+2=0$ 或 $x-1=0$，解得 $x_1=-2$，$x_2=1$.

(2) $x(x-7)=8(7-x)$，$x(x-7)+8(x-7)=0$，$(x-7)(x+8)=0$，解得 $x_1=7$，$x_2=-8$.

9. C 【解析】$5(3x-1)^2-2(3x-1)=0$，提取公因式 $3x-1$，得 $(3x-1)[5(3x-1)-2]=0$，即 $(3x-1)(15x-7)=0$，解得 $x_1=\frac{1}{3}$，$x_2=\frac{7}{15}$，所以最合适的方法是因式分解法，故选 C.

10. 丁 【解析】由题意知，丁的解法完全正确，故答案为丁.

11.【解】(1)$\because (x+1)^2=9$,$\therefore x+1=\pm 3$,$\therefore x_1=2$,$x_2=-4$.

(2)$x^2-4x=6$,两边同时加上 4,得 $x^2-4x+4=10$,$\therefore (x-2)^2=10$,$\therefore x-2=\pm\sqrt{10}$,$\therefore x_1=2+\sqrt{10}$,$x_2=2-\sqrt{10}$.

(3)$a=2$,$b=-3$,$c=-1$,$\therefore \Delta=(-3)^2-4\times 2\times(-1)=17>0$,$\therefore x=\frac{3\pm\sqrt{17}}{2\times 2}=\frac{3\pm\sqrt{17}}{4}$,$\therefore x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{4}$,$x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{4}$.

(4)$(x-1)^2=(2x+1)^2$,移项,得 $(x-1)^2-(2x+1)^2=0$,$\therefore [(x-1)+(2x+1)][(x-1)-(2x+1)]=0$,$\therefore 3x(-x-2)=0$,$\therefore 3x=0$ 或 $-x-2=0$,$\therefore x_1=0$,$x_2=-2$.

刷提升

1. A 【解析】$\because a^2+b^2-11=0$,① $a^2-5b-5=0$,② $\therefore$ ①-②得 $b^2+5b-6=0$,$\therefore (b+6)(b-1)=0$,$\therefore b_1=-6$,$b_2=1$. 当 $b=-6$ 时,$a^2=-25$,方程无实数根,不合题意,舍去. $\therefore b=1$. 故选 A.

2. C 【解析】$\because x^2-2mx+m^2=4$,$\therefore (x-m+2)(x-m-2)=0$,$\therefore x-m+2=0$ 或 $x-m-2=0$. $\because x_1>x_2$,$\therefore x_1=m+2$,$x_2=m-2$. $\because x_1=2x_2+3$,$\therefore m+2=2(m-2)+3$,解得 $m=3$. 故选 C.

3. -1 【解析】由方程 $(x-3)(x-b)=0$,得 $x_1=3$,$x_2=b$. 因为方程 $(x-1)^2=a$ 的两个根与方程 $(x-3)(x-b)=0$ 的两个根相同,则将 $x=3$ 代入 $(x-1)^2=a$,得 $a=4$,解方程 $(x-1)^2=4$,得 $x_1=3$,$x_2=-1$,所以 $b=-1$. 故答案为-1.

4. 6 【解析】$\because O$ 是原点,且是 AB 的中点,$\therefore OA=OB$. $\because$ 点 B 表示的数是 x,$\therefore$ 点 A 表示的数是$-x$. $\because B$ 是 AC 的中点,$\therefore AB=BC$,$\therefore (x^2-3x)-x=x-(-x)$,$x(x-3)-3x=0$,$x(x-6)=0$,解得 $x_1=0$,$x_2=6$. $\because$ 点 B 异于原点,$\therefore x\neq 0$,$\therefore x=6$. 故答案为 6.

5.【解】(1)①方程因式分解,得$(x-7)(x-3)=0$,$\therefore x-7=0$ 或 $x-3=0$,$\therefore x_1=7$,$x_2=3$.

②方程因式分解,得$(x+1)(x+4)=0$,$\therefore x+1=0$ 或 $x+4=0$,$\therefore x_1=-1$,$x_2=-4$.

③方程因式分解,得$(x+1)(x-7)=0$,$\therefore x+1=0$ 或 $x-7=0$,$\therefore x_1=-1$,$x_2=7$.

(2)$x_1=\frac{5}{2\,024}$,$x_2=-1$. 方程因式分解,得$(2\,024x-5)(x+1)=0$,$\therefore 2\,024x-5=0$ 或 $x+1=0$,$\therefore x_1=\frac{5}{2\,024}$,$x_2=-1$.

关键点拨 解答此题的关键是进行分类讨论并正确去掉绝对值符号.

刷素养

6.【解】①当 $x-1\geqslant 0$,即 $x\geqslant 1$ 时,$|x-1|=x-1$,方程化为 $x^2-(x-1)-1=0$,即 $x^2-x=0$,分解因式得 $x(x-1)=0$,可得 $x=0$ 或 $x-1=0$,解得 $x=0$(舍去)或 1.

②当 $x-1<0$,即 $x<1$ 时,$|x-1|=1-x$,方程化为 $x^2+(x-1)-1=0$,即 $x^2+x-2=0$,分解因式得$(x-1)(x+2)=0$,可得 $x-1=0$ 或 $x+2=0$,解得 $x=1$(舍去)或-2. 综上,原方程的解为 $x=1$ 或-2.

*5　一元二次方程的根与系数的关系

刷基础

1. C 【解析】设关于 x 的一元二次方程 $x^2+mx-6=0$ 的另一个根为 t,则 $3t=-6$,解得 $t=-2$. 故选 C.

刷有所得 根与系数的关系:若 x_1,x_2 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0(a\neq 0)$ 的两根,则 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$,$x_1x_2=\frac{c}{a}$.

2. A 【解析】根据题意得 $\Delta=(2m-1)^2-4m^2\geqslant 0$,解得 $m\leqslant\frac{1}{4}$,$a+b=2m-1$,$ab=m^2$. $\because a+b=ab-4$,$\therefore 2m-1=m^2-4$,整理得 $m^2-2m-3=0$,解得 $m_1=-1$,$m_2=3$(舍去),$\therefore m$ 的值为-1. 故选 A.

3. C 【解析】$\because$ 实数 m,$n(m\neq n)$满足 $m^2-m-1=0$,$n^2-n-1=0$,$\therefore m$,n 可以看成是方程 $x^2-x-1=0$ 的两个不相等的实数根,$\therefore m+n=1$,$mn=-1$,$\therefore (m-n)^2=m^2+n^2-2mn=(m+n)^2-4mn=1+4=5$,$\therefore m-n=\pm\sqrt{5}$,故选 C.

4. C 【解析】将原方程化简成一般形式得 $x^2+x-2-p^2=0$,$\therefore a=1$,$b=1$,$c=-2-p^2$,$\therefore \Delta=1^2-4\times 1\times(-2-p^2)=9+4p^2$. $\because p^2\geqslant 0$,$\therefore 9+4p^2>0$,即 $\Delta>0$,$\therefore$ 原方程有两个不相等的实数根. 又 $\because \frac{c}{a}=-2-p^2<0$,$\therefore$ 原方程有一个正根,一个负根. 故选 C.

5. 3 【解析】$\because x_1$,x_2 是方程 $x^2-2x-1=0$ 的两个实数根,$\therefore x_1+x_2=2$,$x_1x_2=-1$,则 $x_1+x_2-x_1x_2=2-(-1)=3$. 故答案为 3.

6. 2 【解析】根据题意,知 $x_1+x_2=3x_2=3$,得 $x_2=1$. 将其代入关于 x 的方程 $x^2-3x+k=0$,得 $1^2-3\times 1+k=0$,解得 $k=2$. 故答案为 2.

7. $-\frac{3}{2}$ 【解析】$\because m$,n 是一元二次方程 x^2-3x-

$2=0$ 的两个根，$\therefore m+n=3, mn=-2$，$\therefore \frac{1}{m}+\frac{1}{n}=\frac{m+n}{mn}=-\frac{3}{2}$. 故答案为 $-\frac{3}{2}$.

8. $-2\quad -3$ 【解析】依题意，得 $q=1\times(-3)=-3$，$p=-[4+(-2)]=-2$. 故答案为 $-2,-3$.

9. 2 【解析】根据根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\frac{2k}{k-1}$，$x_1x_2=\frac{2}{k-1}$. 由题意得 $S=\frac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{x_1x_2}+x_1+x_2=2$，$\therefore (x_1+x_2)^2-4x_1x_2+x_1x_2(x_1+x_2)=0$，$\therefore \left(-\frac{2k}{k-1}\right)^2-\frac{8}{k-1}+\frac{2}{k-1}\times\left(-\frac{2k}{k-1}\right)=0$，整理得 $k^2-3k+2=0$，解得 $k_1=1, k_2=2$. $\because k-1\neq 0$，$\Delta=4k^2-8(k-1)\geqslant 0$，$\therefore k=2$. 故答案为 2.

10.【解】(1) $\because$ 关于 x 的方程 $x^2-3x+k=0$ 有两个实数根，$\therefore (-3)^2-4\times1\times k\geqslant 0$，$\therefore k\leqslant\frac{9}{4}$.

(2) $\because x_1, x_2$ 是方程 $x^2-3x+k=0$ 的两个实数根，$\therefore x_1+x_2=3$，$x_1x_2=k$，$x_1^2-3x_1=-k$，$x_2^2-3x_2=-k$. $\because (x_1^2-2x_1)(x_2^2-2x_2)=8$，即 $(x_1-k)(x_2-k)=8$，$\therefore x_1x_2-k(x_1+x_2)+k^2=8$，

$\therefore k^2-2k-8=0$，解得 $k=-2$ 或 4. 又 $\because k\leqslant\frac{9}{4}$，

$\therefore k=-2$.

刷易错

11.【解】不正确. 他忽略了 $\Delta\geqslant 0$ 这一条件. 正确解题过程如下：

由一元二次方程的根与系数的关系，得

$x_1+x_2=2m, x_1x_2=m^2-m-1$.

$\because x_1+x_2=1-x_1x_2$，

$\therefore 2m=1-(m^2-m-1)$，

$\therefore m^2+m-2=0$，$\therefore (m+2)(m-1)=0$，

$\therefore m=-2$ 或 $m=1$. 又 $\because \Delta=4m^2-4(m^2-m-1)\geqslant 0$，解得 $m\geqslant -1$，$\therefore m=1$.

易错警示

由一元二次方程的根与系数的关系求出 m 的值后，容易忽略 $\Delta\geqslant 0$，导致错误.

6 一元二次方程的应用

课时 1 几何图形与平均变化率问题

刷基础

1. A 【解析】由题意，得 $(30+2x)(20+2x)=704$，解得 $x_1=1, x_2=-26$（舍去），故小华添加的边框的宽度是 1 cm. 故选 A.

关键点拨

列出关于 x 的一元二次方程，解之取其符合题意的值，即可得出结论.

2. 81 【解析】设正方形钢板的边长为 x cm. 根据题意得 $x^2-3x=54$，解得 $x=9$ 或 $x=-6$（不合题意，舍去）. 故原来这块钢板的面积是 $x^2=9\times9=81(\text{cm}^2)$. 故答案为 81.

3.【解】设 AD 的长为 x 米，则 AB 的长为 $(80-x)$ 米. (1) 根据题意，得 $x(80-x)=1\ 200$，整理，得 $x^2-80x+1\ 200=0$，解得 $x_1=20, x_2=60$.

答：AD 的长为 20 米或 60 米.

(2) 不能. 理由如下：根据题意，得 $x(80-x)=1\ 800$，整理，得 $x^2-80x+1\ 800=0$，$\Delta=(-80)^2-4\times1\times1\ 800=-800<0$，$\therefore$ 该方程无实数根，$\therefore$ 不能围成面积为 1 800 平方米的蔬菜种植基地.

4. A 【解析】设平均每次降低售价的百分率为 x，则第一次降低售价后每架的售价为 $300(1-x)$ 元，第二次降低售价后每架的售价为 $300(1-x)^2$ 元，所以根据题意可列方程为 $300(1-x)^2=243$，解得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=1.9$（舍去），故选 A.

5. 10% 【解析】设线上销售占比的月平均增长率为 x. 根据题意，得 $25\%(1+x)^2=30.25\%$，解得 $x_1=0.1=10\%$，$x_2=-2.1$（不合题意，舍去），$\therefore$ 线上销售占比的月平均增长率为 10%. 故答案为 10%.

6.【解】(1) 设 3 月份到 5 月份到该红色研学基地研学的新增人数的月平均增长率为 x. 由题意得 $10(1+x)^2=14.4$，解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$（不符合题意，舍去）.

答：3 月份到 5 月份到该红色研学基地研学的新增人数的月平均增长率为 20%.

(2) 由题意可知，6 月份该红色研学基地新增人数为 $14.4\times(1+20\%)=17.28$（万人），7 月份该红色研学基地新增人数为 $17.28\times(1+20\%)=20.736$（万人）.

答：从 7 月份开始，该红色研学基地新增人数能达到 20 万人.

刷提升

1. C 【解析】设矩形纸片的长为 x cm，宽为 y cm. 依题意，得 $\begin{cases}xy=16+3(x-4)+8,①\\ xy=16+3(y-4)+11,②\end{cases}$ (②−①)÷3，得 $y-x+1=0$，$\therefore x=y+1$. ③ 将③代入②，得 $y(y+1)=16+3(y-4)+11$. 整理，得 $y^2-2y-15=0$，解得 $y_1=5, y_2=-3$（舍去），$\therefore x=6$. $\therefore$ 按题图(3)放置时，矩形纸片没有被两个正方形纸片覆盖的部分的面积为 $(x-4)(y-3)+(x-3)(y-4)=2\times2+3\times1=7(\text{cm}^2)$. 故选 C.

2. C 【解析】设乙店二、三月份销售额的月平均

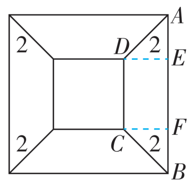
增长率为 x,则甲店三月份的销售额为 $10(1+2x)^2$ 万元,乙店三月份的销售额为 $15(1+x)^2$ 万元. 由题意得 $10(1+2x)^2-15(1+x)^2=10$,解得 $x_1=0.6=60\%$,$x_2=-1$(不合题意,舍去),所以乙店二、三月份销售额的月平均增长率为 60%,故选 C.

3. C 【解析】设该市快递业务量 2023 年与 2024 年的年平均增长率为 x,则根据题意得 $a(1+x)^2=(1+21\%)a$,解得 $x_1=0.1=10\%$,$x_2=-2.1$(不合题意,舍去),$\therefore b=a(1+x)=1.1a$,故选 C.

刷有所得

在平均增长率问题中,常利用以下公式求解:设 a 为原来的量,m 为平均增长率,n 为增长次数,b 为增长后的量,则 $a(1+m)^n=b$.

4. $10\sqrt{2}+2\sqrt{10}$ 【解析】如图,过 D 作 $DE\perp AB$ 于 E,过 C 作 $CF\perp AB$ 于 F,则易得四边形 $CDEF$ 是矩形,



$\therefore EF=CD$. 由题意得 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCF$ 是等腰直角三角形,$AD=BC=2$,$\therefore$ 易得 $AE=DE=BF=CF=\sqrt{2}$. 设 $CD=EF=x$,$\therefore x^2=\frac{1}{2}(x+2\sqrt{2}+x)\times\sqrt{2}$,解得 $x_1=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$,$x_2=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{10}}{2}$(不合题意,舍去),$\therefore AB=2\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}=\frac{5\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$,$\therefore$ 这块正方形地砖的周长为 $4AB=10\sqrt{2}+2\sqrt{10}$,故答案为 $10\sqrt{2}+2\sqrt{10}$.

5.【解】(1)设第一季度加工量的月平均增长率为 x. 由题意得 $(1+x)^2=1.44$,解得 $x_1=0.2=20\%$,$x_2=-2.2$(不合题意,舍去).

答:该厂第一季度加工量的月平均增长率为 20%.

(2)由题意得 $a+1.2a+1.44a=182$,解得 $a=50$.

答:a 的值是 50.

(3)六月份的加工量为 $50\times2.1=105$(吨),五月份的加工量为 $105-46.68=58.32$(吨). 设从三月份到五月份逐月下降的百分率为 y. 由题意得 $50\times1.44\times(1-y)^2=58.32$,解得 $y_1=0.1=10\%$,$y_2=1.9$(不合题意,舍去),$\therefore$ 从三月份到五月份逐月下降的百分率为 10%,$\therefore$ 四月份的加工量为 $50\times1.44\times0.9=64.8$(吨),$\therefore$ 第二季度的总加工量为 $64.8+58.32+105=228.12$(吨).

答:该厂第二季度的总加工量是 228.12 吨.

6.【解】(1)①若 EF 的长为 x 米,则 $DE=38+2+2-(3x-3)=(45-3x)$米. 故答案为$(45-3x)$.

思路分析

(2)设 EF 的长为 y 米,用含 y 的代数式表示出 DE 的长,利用矩形的面积计算公式,即可得出关于 y 的一元二次方程,由根的判别式 $\Delta=-16<0$,可得出该方程没有实数根,即不能达到.

②依题意得 $x(45-3x)=132$,整理得 $x^2-15x+44=0$,解得 $x_1=4$,$x_2=11$. 当 $x=4$ 时,$45-3x=45-3\times4=33>15$,不合题意,舍去;当 $x=11$ 时,$45-3x=45-3\times11=12<15$,符合题意.

答:饲养场的宽 EF 的长为 11 米.

(2)不能达到. 理由:设 EF 的长为 y 米,则 $DE=\frac{38+15+2+2-(3y-3)}{2}=\frac{60-3y}{2}$(米).

依题意得 $y\cdot\frac{60-3y}{2}=156$,整理得 $y^2-20y+104=0$. $\because \Delta=(-20)^2-4\times1\times104=-16<0$,$\therefore$ 该方程没有实数根,即当点 F 在线段 BC 的延长线上时,所围成的饲养场 $BDEF$ 的面积不能达到 156 平方米.

7.【解】(1)设 3 月份再生纸的产量为 x 吨,则 4 月份再生纸的产量为$(2x-100)$吨. 依题意得 $x+2x-100=800$,解得 $x=300$,$\therefore 2x-100=2\times300-100=500$.

答:4 月份再生纸的产量为 500 吨.

(2)依题意得 $1\,000\left(1+\frac{m}{2}\%\right)\times500(1+m\%)=660\,000$,整理得 $m^2+300m-6\,400=0$,解得 $m_1=20$,$m_2=-320$(不合题意,舍去).

答:m 的值为 20.

(3)设 4 至 6 月份每吨再生纸利润的月平均增长率为 y,5 月份再生纸的产量为 a 吨. 依题意得 $1\,200(1+y)^2\cdot a(1+y)=(1+25\%)\times1\,200(1+y)\cdot a$,$\therefore 1\,200(1+y)^2=1\,500$.

答:6 月份每吨再生纸的利润是 1 500 元.

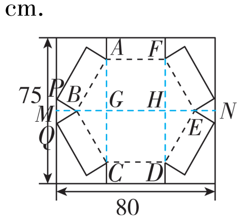
刷素养

8.【解】任务 1:由题意,得 $13(1+x)^2=15.6$. 故答案为 $13(1+x)^2=15.6$.

任务 2:设裁掉正方形的边长为 m cm. 由题意,得$(75-2m)\times(80-2m)=3\,300$,解得 $m_1=10$,$m_2=\frac{135}{2}$(不符合题意,舍去).

答:此时纸盒的高度为 10 cm.

任务 3:如图,设纸盒的底面的边长为 a cm,纸盒的高度为 b cm. $\because$ 正六边形的每条边都相等,每个内角都为 120°,



$\therefore \triangle ABC$ 为等腰三角形,$\angle ABC=120°$,$\therefore \angle BAC=\angle BCA=30°$. 由正六边形的性质可得 BE 平分 $\angle ABC$,$\therefore \angle ABE=60°$. 又 $\angle AGB=90°$,$\therefore$ Rt$\triangle ABG$ 中,$BG=\frac{1}{2}a$,$\therefore AG=\frac{\sqrt{3}}{2}a$. 同

理可得 Rt△FHE 中，$HE=\frac{1}{2}a$. ∵ $CG=AG=\frac{\sqrt{3}}{2}a$，$b+AG+GC+b=75$，∴ $2b+\sqrt{3}a=75$. ①

∵ $\angle PBQ=360°-120°-90°-90°=60°$，$PB=QB=b$，∴ △$PBQ$ 是边长为 b 的等边三角形. 易知 BM 为△PBQ 的高，∴ Rt△PBM 中，$PM=\frac{1}{2}b$，∴ $BM=\frac{\sqrt{3}}{2}b$. 同理可得 $EN=BM=\frac{\sqrt{3}}{2}b$.

∵ 易知四边形 $AGHF$ 为矩形，∴ $GH=AF=a$.

∵ $MN=MB+BG+GH+HE+EN=80$，∴ $2a+\sqrt{3}b=80$. ②

联立①②可得 $b=150-80\sqrt{3}$.

答：此时纸盒的高度为$(150-80\sqrt{3})$cm.

课时 2　销售利润与动态几何问题

刷基础

1. D 【解析】设每箱小米应降价 x 元. 根据题意，得$(120-80-x)(20+2x)=1\ 050$，解得 $x_1=5$，$x_2=25$. ∵ 要使顾客尽量得到实惠，∴ $x=5$ 不合题意，舍去，∴ 每箱小米应降价 25 元. 故选 D.

2. 【解】(1)$99-\frac{50-42}{2}=99-4=95$(元/件)，∴ 当日销售量为 50 件时，售价为 95 元/件. 故答案为 95.

(2)根据题意得 $y=42+2(99-x)=-2x+240$.

∵ 该产品的进货价为 70 元/件，售价始终高于进货价，且该电商在直播中承诺商品价格永远不会超过 99 元/件，∴ $70<x\leqslant 99$.

(3)根据题意，得$(x-70)(-2x+240)=1\ 200$，整理，得 $x^2-190x+9\ 000=0$，解得 $x_1=90$，$x_2=100$(不符合题意，舍去).

答：该产品的售价定为 90 元/件时，电商每天可盈利 1 200 元.

3. B 【解析】由题意可知阴影部分为平行四边形. 设 AC 交 $A'B'$ 于 H. 在平移后的图形中，∵ $\angle A=45°$，$\angle D=\angle AA'H=90°$，∴ △$A'HA$ 是等腰直角三角形. 设 $AA'=x$ cm，则 $A'H=x$ cm，$A'D=(2-x)$cm，∴ $x\cdot(2-x)=1$，∴ $x=1$，即 $AA'=1$ cm. 故选 B.

4. 3 【解析】设点 P 移动 $t(t\leqslant 3)$s 时，能使△PBQ 的面积为 $\frac{15}{4}$ cm^2，则 BP 的长为 $\left(4-\frac{1}{2}t\right)$ cm，BQ 的长为 t cm. 可列方程为 $\frac{1}{2}\left(4-\frac{1}{2}t\right)\times t=\frac{15}{4}$，解得 $t_1=3$，$t_2=5$(舍去)，∴ 点 P 移动 3 s 时，能使△PBQ 的面积为 $\frac{15}{4}$ cm^2. 故答案为 3.

关键点拨：借助三角形的面积公式来研究图形中的动点问题是解题的关键.

5. 【解】由勾股定理得 $AC^2+BC^2=AB^2$.

设缉私艇从 C 处到 B 处需航行 x h，

则 $30^2+(60x)^2=(75x)^2$，

解得 $x_1=-\frac{2}{3}$(不合题意，舍去)，$x_2=\frac{2}{3}$.

答：缉私艇从 C 处到 B 处需航行$\frac{2}{3}$ h.

6. 【解】(1)由题意得 $AP=2t$ cm，$BQ=4t$ cm，则 $PB=AB-AP=(10-2t)$cm. 在 Rt△PBQ 中，由勾股定理得 $PB^2+BQ^2=PQ^2$，即$(10-2t)^2+(4t)^2=10^2$，整理得 $t^2-2t=0$，解得 $t_1=2$，$t_2=0$(不合题意，舍去)，∴ 当 $t=2$ 时，PQ 的长度等于 10 cm.

(2)存在 t 的值，使得五边形 $APQCD$ 的面积等于 104 cm^2. 由题意得 $S_{矩形ABCD}=10\times 12=120(\text{cm}^2)$，$S_{\triangle PBQ}=\frac{1}{2}PB\cdot BQ=\frac{1}{2}\times(10-2t)\times 4t=-4t^2+20t$，∴ $S_{五边形APQCD}=S_{矩形ABCD}-S_{\triangle PBQ}=120-(-4t^2+20t)=104$，整理得 $t^2-5t+4=0$，解得 $t_1=4$，$t_2=1$. 当 $t=4$ 时，$BQ=16$ cm>12 cm，不合题意，舍去；当 $t=1$ 时，$BQ=4$ cm<12 cm，符合题意，∴ 存在 t 的值，使得五边形 $APQCD$ 的面积等于 104 cm^2，此时 t 的值为 1.

刷提升

1. A 【解析】设 1 瓶电热蚊香液的进价为 x 元，则 1 瓶电热蚊香液的售价为 $1.2x$ 元，则 1 套驱蚊器的售价为 $6x$ 元，进价为 $4.8x$ 元. 由题意得 $4.8x\times 25\%+4x\times 20\%=10$，解得 $x=5$，所以 1 套驱蚊器的售价为 $5\times 6=30$(元)，1 套驱蚊器的利润为 $30-4.8\times 5=30-24=6$(元). 设每套驱蚊器降价 a 元，由题意得$(6-a)(50+5a)=275$，解得 $a_1=1$，$a_2=-5$(舍去). 故选 A.

2. 6 【解析】∵ Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，$AB=AC=16$，AD 为 BC 边上的高，∴ $\angle C=45°$，$\angle ADC=90°$，易得 $AD=BD=CD=8\sqrt{2}$. 又 ∵ $AP=\sqrt{2}t$，∴ $S_1=\frac{1}{2}AP\cdot BD=\frac{1}{2}\times 8\sqrt{2}\times\sqrt{2}t=8t$，$PD=8\sqrt{2}-\sqrt{2}t$. ∵ 矩形 $PDFE$ 中，$PE/\!/DF$，∴ $PE/\!/BC$，∴ $\angle AEP=\angle C=45°$，$\angle APE=\angle ADC=90°$，∴ $\angle PAE=\angle PEA=45°$，∴ $PE=AP=\sqrt{2}t$，∴ $S_2=PD\cdot PE=(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\cdot\sqrt{2}t$.

思路分析：利用三角形的面积公式以及矩形的面积公式，表示出 S_1 和 S_2，然后根据 $S_1=2S_2$，列方程求解即可.

$\because S_1=2S_2$，$\therefore 8t=2(8\sqrt{2}-\sqrt{2}t)\cdot\sqrt{2}t$，解得 $t=6$ 或 0（舍去）. 故答案为 6.

3. 2 或 4 或 $(3+\sqrt{17})$

思路分析

两种情况 → P在AO上 → $\frac{1}{2}PO\cdot OQ=8$ → $\frac{1}{2}(6-t)\cdot 2t=8$ → $t_1=2$，$t_2=4$

两种情况 → P在BO上 → $\frac{1}{2}PO\cdot OQ=8$ → $\frac{1}{2}(t-6)\cdot 2t=8$ → $t_1=3+\sqrt{17}$，$t_2=3-\sqrt{17}$(舍)

【解析】分两种情况：①当点 P 在 AO 上时，由题意得 $\frac{1}{2}(6-t)\cdot 2t=8$，整理得 $t^2-6t+8=0$，解得 $t_1=2$，$t_2=4$；②当点 P 在 BO 上时，由题意得 $\frac{1}{2}(t-6)\cdot 2t=8$，整理得 $t^2-6t-8=0$，解得 $t_1=3+\sqrt{17}$，$t_2=3-\sqrt{17}$（不符合题意，舍去）. 综上所述，经过 2 秒或 4 秒或 $(3+\sqrt{17})$ 秒，$\triangle POQ$ 的面积为 8 平方厘米. 故答案为 2 或 4 或 $(3+\sqrt{17})$.

4.【解】(1) 由题意可知，每天能售出 $(150+3x)$ 千克. 故答案为 $(150+3x)$.

(2) 设杨梅售价每千克下降 y 元. 由题意得 $(60-y)(150+3y)=9\ 072$，整理得 $y^2-10y+24=0$，解得 $y_1=4$，$y_2=6$，$\therefore 60-y=60-4=56$ 或 $60-y=60-6=54$.

答：杨梅售价为每千克 54 元或每千克 56 元时，每天能获得 9 072 元的销售额.

(3) 按题目的条件不能达成这个“小目标”. 理由如下：设售价每千克下降 m 元. 由题意得 $(60-m)(150+3m)=10\ 000$，整理得 $3m^2-30m+1\ 000=0$，$\therefore \Delta=30^2-4\times3\times1\ 000=-11\ 100<0$，$\therefore$ 方程无实数根，$\therefore$ 不能达成这个“小目标”.

5.【解】(1) 设 y 与 x 之间的函数关系式为 $y=kx+b(k\neq0)$. 将 $(2,120)$，$(4,140)$ 代入 $y=kx+b$，得 $\begin{cases}2k+b=120,\\4k+b=140,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}k=10,\\b=100,\end{cases}$

$\therefore y$ 与 x 之间的函数关系式为 $y=10x+100(0<x<20)$.

(2) $(60-3-40)\times(10\times3+100)=17\times130=2\ 210$（元）.

答：当每千克干果降价 3 元时，超市获利 2 210 元.

(3) 依题意得 $(60-x-40)(10x+100)=2\ 090$，整理得 $x^2-10x+9=0$，解得 $x_1=1$，$x_2=9$. 又 $\because$ 要让顾客获得更大实惠，$\therefore x=9$.

答：这种干果每千克应降价 9 元.

思路分析 (3) 列出关于 x 的一元二次方程，解之即可得出 x 的值，再结合要让顾客获得更大实惠，即可得出这种干果每千克应降价 9 元.

6.【解】(1) 由题意得 $AO=8$ cm，$BO=6$ cm，1 s 时，$AM=2$ cm，$BN=1$ cm，$\therefore OM=6$ cm，$ON=5$ cm，$\therefore \triangle MON$ 的面积为 $\frac{1}{2}\times6\times5=15(\text{cm}^2)$.

故答案为 15.

思路分析 (2) 设运动时间为 t s，则 $AM=2t$ cm，$BN=t$ cm，根据点 M，N 的位置分情况讨论即可.

(2) 设运动时间为 t s，则 $AM=2t$ cm，$BN=t$ cm. 当 M 在 AO 上，N 在 BO 上时，$0\leqslant t<4$，$MO=(8-2t)$ cm，$NO=(6-t)$ cm，$\therefore \frac{1}{2}\times(8-2t)\times(6-t)=1$，解得 $t=5+\sqrt{2}$（舍去）或 $5-\sqrt{2}$；当 M 在 CO 上，N 在 BO 上时，$4<t<6$，$MO=(2t-8)$ cm，$NO=(6-t)$ cm，$\therefore \frac{1}{2}\times(2t-8)\times(6-t)=1$，则 $t=5$；当 M 在 CO 上，N 在 DO 上时，$6<t\leqslant8$，$MO=(2t-8)$ cm，$NO=(t-6)$ cm，$\therefore \frac{1}{2}\times(2t-8)\times(t-6)=1$，解得 $t=5+\sqrt{2}$ 或 $5-\sqrt{2}$（舍去）. 综上所述，出发 $(5+\sqrt{2})$ s 或 $(5-\sqrt{2})$ s 或 5 s 时，$\triangle MON$ 的面积为 1 cm^2.

7.【解】(1) 设总共生产了 a 袋手工汤圆.

依题意得 $\frac{0.3a}{450}+\frac{0.5a}{300}=21$，

解得 $a=9\ 000$.

答：总共生产了 9 000 袋手工汤圆.

(2) 设促销时每袋应降价 x 元. 当刚好 10 天全部卖完时，依题意得，$225\times2\times(25-13)+8(25-13-x)\left(225+75\cdot\frac{x}{2}\right)=40\ 500$，整理得 $x^2-6x+45=0$，$\Delta=6^2-4\times45<0$，$\therefore$ 方程无实数解，$\therefore$ 10 天不能全部卖完. 第 10 天结束后将还未售出的手工汤圆以 15 元/袋的价格全部卖给古城小吃店的利润为 $(15-13)\left[9\ 000-2\times225-8\left(225+75\cdot\frac{x}{2}\right)\right]=13\ 500-600x$，

$\therefore$ 依题意得 $225\times2\times(25-13)+8(25-13-x)\cdot\left(225+75\cdot\frac{x}{2}\right)+13\ 500-600x=40\ 500$，解得 $x_1=4$，$x_2=0$（舍去），即促销时每袋应降价 4 元.

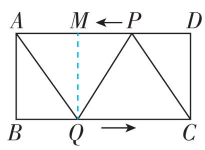
刷素养

8.【解】(1) 在矩形 $ABCD$ 中，$\angle B=90°$，$AD/\!/BC$，$AD=BC$. 由题意得 $BQ=DP=t$ cm，$AP=CQ=(8-t)$ cm. 当 $BQ=AP$ 时，四边形 $ABQP$ 为矩形，$\therefore t=8-t$，解得 $t=4$，$\therefore$ 当 $t=4$ 时，四边形 $ABQP$ 为矩形，故答案为 4.

(2) 由 (1) 得 $AP=CQ$，$AD/\!/BC$，$\therefore$ 四边形 $AQCP$ 为平行四边形，$\therefore$ 当 $AQ=CQ$ 时，四边形

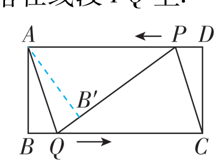
$AQCP$ 为菱形. ∵ $\angle B=90°$,∴ 根据勾股定理得 $AQ^2=AB^2+BQ^2=4^2+t^2$. ∵ $CQ^2=(8-t)^2$,∴ $4^2+t^2=(8-t)^2$,解得 $t=3$,∴ 当 $t=3$ 时,四边形 $AQCP$ 为菱形,故答案为 3.

(3)不存在某一时刻使得 $PQ\perp PC$. 理由如下:过 Q 作 $QM\perp AD$ 于 M,如图(1),则 $\angle QMD=\angle QMA=90°$. ∵ $\angle QMA=\angle BAM=\angle B=90°$,∴ 四边形 $ABQM$ 是矩形,∴ $AM=BQ=t$ cm,$QM=AB=4$ cm,∴ $MP=(8-2t)$ cm,∴ $PQ^2=PM^2+QM^2=(8-2t)^2+4^2$. 在矩形 $ABCD$ 中,$\angle D=90°$,∴ $\triangle PDC$ 为直角三角形,∴ $PC^2=PD^2+CD^2=t^2+4^2$. ∵ $PQ\perp PC$,∴ $\angle QPC=90°$,∴ $PQ^2+PC^2=CQ^2$,即 $(8-2t)^2+4^2+t^2+4^2=(8-t)^2$,∴ $t^2-4t+8=0$. ∵ $\Delta=b^2-4ac=16-32=-16<0$,∴ 此方程无实数根,∴ 不存在某一时刻使得 $PQ\perp PC$.



图(1)

(4)如图(2),根据折叠可知 $\angle AQB=\angle AQB'$,$AB'=AB=4$ cm,$BQ=B'Q=t$ cm,$\angle AB'Q=\angle B=90°$. 在矩形 $ABCD$ 中,$AD\parallel BC$,∴ $\angle AQB=\angle PAQ$,∴ $\angle AQB'=\angle PAQ$,∴ $PA=PQ=(8-t)$ cm,∴ $B'P=8-t-t=(8-2t)$ cm. ∵ $\angle AB'P=180°-90°=90°$,∴ 在 $\mathrm{Rt}\triangle AB'P$ 中,根据勾股定理得 $AB'^2+B'P^2=PA^2$,∴ $4^2+(8-2t)^2=(8-t)^2$,∴ $3t^2-16t+16=0$,解得 $t_1=4$,$t_2=\frac{4}{3}$,∴ 当 t 为 4 或 $\frac{4}{3}$ 时,翻折后点 B 的对应点 B' 恰好落在线段 PQ 上.



图(2)

全章综合训练

刷中考

1. **A** 【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $(a+2)x^2+x+a^2-4=0$ 的一个根是 $x=0$,∴ $a^2-4=0$ 且 $a+2\neq0$,解得 $a=2$. 故选 A.

2. **C** 【解析】$x^2-10x+21=0$,$(x-3)(x-7)=0$,解得 $x_1=3$,$x_2=7$. 当等腰三角形的边长是 3,3,7 时,$3+3<7$,不符合三角形的三边关系,应舍去;当等腰三角形的边长是 7,7,3 时,这个三角形的周长是 $7+7+3=17$. 故选 C.

3. $x_1=1,x_2=-1$ 【解析】∵ $x^2-1=0$,∴ $x^2=1$,∴ $x_1=1$,$x_2=-1$,故答案为 $x_1=1$,$x_2=-1$.

4. 【解】整理,得 $x^2-7x+12=0$,因式分解,得 $(x-4)(x-3)=0$,所以 $x-4=0$ 或 $x-3=0$,解得 $x_1=4$,$x_2=3$.

5. **C** 【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $ax^2+2x+1=0$ 有两个相等的实数根,∴ $\Delta=0$ 且 $a\neq0$,∴ $2^2-4a=0$ 且 $a\neq0$,∴ $a=1$. 故选 C.

6. **B** 【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $x^2-2x+a=0$ 无实数根,∴ $\Delta=(-2)^2-4\times1\times a<0$,解得 $a>1$. 故选 B.

关键点拨 利用二次项系数非零及根的判别式 $\Delta\geq0$,列出关于 a 的一元一次不等式组是解题的关键.

7. **C** 【解析】∵ 关于 x 的一元二次方程 $(a-1)x^2+2x+1=0$ 有实数根,∴ $\begin{cases}a-1\neq0,\\ \Delta=2^2-4\times(a-1)\times1\geq0,\end{cases}$ 解得 $a\leq2$ 且 $a\neq1$,∴ 实数 a 的取值范围是 $a\leq2$ 且 $a\neq1$. 故选 C.

8. 方程有两个不相等的实数根 【解析】一元二次方程 $2x^2+x-1=0$,∴ $\Delta=1^2-4\times2\times(-1)=9>0$,∴ 该方程有两个不相等的实数根. 故答案为方程有两个不相等的实数根.

9. $m>-4$ 【解析】由题意得,$\Delta=b^2-4ac=16+4m>0$,解得 $m>-4$. 故答案为 $m>-4$.

10. **C** 【解析】∵ x_1,x_2 是方程 $x^2-20x-25=0$ 的两个实数根,∴ 根据根与系数的关系可得 $x_1+x_2=-\frac{-20}{1}=20$,故选 C.

11. **C** 【解析】方程 $x(x+2)-3=0$,整理得 $x^2+2x-3=0$,∴ 两根之和 $m=-2<0$,两根之积 $n=-3<0$,∴ 点 (m,n) 在平面直角坐标系中位于第三象限. 故选 C.

12. -3 【解析】∵ x_1,x_2 是关于 x 的一元二次方程 $x^2+2x-m=0$ 的两个实数根,∴ $x_1+x_2=-2$. ∵ $x_1=1$,∴ $x_2=-3$,故答案为 -3.

13. 2 027 【解析】∵ m,n 是关于 x 的一元二次方程 $x^2-2\ 025x+1=0$ 的两个根,∴ $m+n=2\ 025$,$mn=1$,∴ $(m+1)(n+1)=mn+m+n+1=1+2\ 025+1=2\ 027$,故答案为 2 027.

关键点拨 解题时运用整体代入(将 $a+b$ 和 a^2-5a 分别看成一个整体)的思想是关键.

14. 29 【解析】∵ 方程 $x^2-5x-24=0$ 的两根分别为 a,b,∴ $a+b=5$,$a^2-5a-24=0$,∴ $a^2-5a=24$,∴ $a^2-4a+b=(a^2-5a)+(a+b)=24+5=29$. 故答案为 29.

15. (1)【解】把 $x_1=-1$ 代入方程 $(x-1)(x-2)=m^2$,得 $m^2=6$,∴ $m=\pm\sqrt{6}$,$(x-1)(x-2)=6$,即 $x^2-3x-4=0$,∴ $(x-4)(x+1)=0$,解得 $x_1=-1$,$x_2=4$. ∴ $x_2=4$,$m=\pm\sqrt{6}$.

(2)【证明】方程 $(x-1)(x-2)=m^2$ 可化为

$x^2-3x+2-m^2=0$. ∵ $\Delta=9-4(2-m^2)=4m^2+1>0$，∴ 方程有两个不相等的实数根. ∵ 方程 $(x-1)(x-2)=m^2$ 的两根为 x_1, x_2，∴ $x_1+x_2=3$，$x_1x_2=2-m^2$，∴ $(x_1-1)(x_2-1)=x_1x_2-(x_1+x_2)+1=2-m^2-3+1=-m^2$. ∵ $m^2\geqslant 0$，∴ $-m^2\leqslant 0$，即 $(x_1-1)(x_2-1)\leqslant 0$.

16. C 【解析】已知矩形的一边长为 x 米，则另一边长为 $(5-x)$ 米，根据矩形的面积为 6 平方米可列方程为 $x(5-x)=6$. 故选 C.

17. B 【解析】设该景区这两年接待游客的年平均增长率为 x. 根据题意得 $25(1+x)^2=36$，解得 $x_1=0.2=20\%$，$x_2=-2.2$（不符合题意，舍去），∴ 该景区这两年接待游客的年平均增长率为 20%. 故选 B.

18.【解】设小路的宽度为 x m，则 9 个矩形地块可拼接成长为 $(20-4x)$ m，宽为 $(14-4x)$ m 的矩形. 根据题意，得 $(20-4x)(14-4x)=24\times 9$，整理，得 $2x^2-17x+8=0$，解得 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_2=8$（不符合题意，舍去）.

答：小路的宽度为 $\dfrac{1}{2}$ m.

19.【解】(1) 三角点阵中前 8 行的点数之和为 $1+2+3+4+5+6+7+8=\dfrac{1}{2}(1+8)\times 8=36$，前 15 行的点数之和为 $1+2+3+\cdots+14+15=\dfrac{1}{2}(1+15)\times 15=120$，那么，前 n 行的点数之和为 $1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}(1+n)\times n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$. 故答案为 $36, 120, \dfrac{1}{2}n(n+1)$.

(2) 由 (1) 得 $\dfrac{1}{2}n(n+1)=500$，∴ $n^2+n-1\,000=0$，∴ $\Delta=1^2-4\times(-1\,000)=4\,001$，∴ 此方程无正整数解，∴ 三角点阵中前 n 行的点数之和不能为 500. 故答案为不能.

(3) 前 n 行的点数之和为 $2+4+6+\cdots+2n=2\times\dfrac{1}{2}(1+n)\times n=n(n+1)$. 由题意得 $n(n+1)=420$，∴ $n^2+n-420=0$，即 $(n+21)(n-20)=0$，解得 $n=20$ 或 $n=-21$（舍去），∴ 一共能摆放 20 排.

刷章测

1. A 【解析】A 项满足等式方程、只含有一个未知数 x、未知数的最高次数为 2 这三个条件，是一元二次方程；B 项有两个未知数；C 项去括号化简后，未知数的最高次数为 1；D 项当 $a=0$ 时，未知数的最高次数不为 2. 故选 A.

易错警示 当一个方程二次项的系数用字母表示时，需要标明该字母不为 0 才能确保该方程是一元二次方程，如无标明，则该方程根据字母的取值可能为一元一次方程，也可能为一元二次方程.

2. A 【解析】把方程 $(2x+3)^2+3(2x+3)-4=0$ 看做关于 $2x+3$ 的一元二次方程，所以 $2x+3=1$ 或 $2x+3=-4$，所以 $x_1=-1$，$x_2=-3.5$. 故选 A.

3. A 【解析】根据题意得 $(20-4x)(15-2x)=84\times 3$，故选 A.

思路分析 首先利用因式分解法求出 x 的值，再根据三角形的三边关系对 x 的值进行取舍，最后再计算出周长即可.

4. C 【解析】∵ $x^2-10x+21=0$，∴ $(x-3)(x-7)=0$，∴ $x=3$ 或 $x=7$. 当 $x=3$ 时，∵ $2+3<6$，∴ 2，3，6 不能组成三角形；当 $x=7$ 时，∵ $2+6>7$，$7-6<2$，∴ 2，6，7 能够组成三角形，∴ 这个三角形的周长为 $2+6+7=15$. 故选 C.

5. D 【解析】$(x-m)^2=5$，$x^2-2mx+m^2=5$，由题意得 $-2m=-4$，解得 $m=2$，∴ $x^2-4x+2^2=5$，$x^2-4x+4=5$，$x^2-4x+1+3=5$，$x^2-4x+1=5-3$，$x^2-4x+1=2$，∴ 印刷不清楚的数是 2，故选 D.

6. B 【解析】设 $DN=m$，则 $NC=1-m$. 由题意可知 $\triangle ADN\cong\triangle APN$，$H$ 是 BC 的中点，∴ $DN=NP=m$，$CH=BH=\dfrac{1}{2}$，$AH=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$. ∵ $S_{正方形ABCD}=S_{\triangle ABH}+S_{\triangle ADN}+S_{\triangle CHN}+S_{\triangle ANH}$，∴ $1\times 1=\dfrac{1}{2}\times 1\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\times 1\times m+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2}\times(1-m)+\dfrac{1}{2}\times\dfrac{\sqrt{5}}{2}\times m$，∴ $m=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. ∵ $x^2+x-1=0$ 的解为 $x=-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$，∴ 取正值为 $x=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$，∴ 这条线段是线段 DN. 故选 B.

7. B 【解析】①若 $a+b+c=0$，则 $x=1$ 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的解，由一元二次方程的实数根与判别式的关系可知 $\Delta=b^2-4ac\geqslant 0$，故①正确；②∵ 方程 $ax^2+c=0$ 有两个不相等的实数根，∴ $\Delta=0-4ac>0$，∴ $-4ac>0$，则方程 $ax^2+bx+c=0$ 的判别式 $\Delta=b^2-4ac>0$，∴ 方程 $ax^2+bx+c=0$ 必有两个不相等的实数根，故②正确；③∵ c 是方程 $ax^2+bx+c=0$ 的一个根，则 $ac^2+bc+c=0$，∴ $c(ac+b+1)=0$，若 $c=0$，等式仍然成立，但 $ac+b+1=0$ 不一定成立，故③不正确；④若 x_0 是一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的根，则由求根公式可得 $x_0=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 或 $x_0=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，∴ $2ax_0+b=\sqrt{b^2-4ac}$ 或 $2ax_0+b=-\sqrt{b^2-4ac}$，∴ $b^2-4ac=(2ax_0+b)^2$，故④正确. 故选 B.

8. 8 【解析】设每个支干长出 x 个小分支，则 $1+x+x^2=73$，解得 $x_1=8$，$x_2=-9$（舍去），∴ 每个支干长出 8 个小分支. 故答案为 8.

9. 2 028 【解析】∵ x_1，x_2 是方程 $x^2+x-2=0$ 的两个实数根，∴ $x_1^2+x_1-2=0$，∴ $x_1^2=-x_1+2$，∴ $x_1^2-x_2+2\ 025=-x_1+2-x_2+2\ 025=-(x_1+x_2)+2+2\ 025$. 根据根与系数的关系得 $x_1+x_2=-\frac{b}{a}=-\frac{1}{1}=-1$，∴ $x_1^2-x_2+2\ 025=1+2+2\ 025=2\ 028$. 故答案为 2 028.

10. 17 【解析】∵ $x^2-kx+72=0$ 是"连根一元二次方程"，$9\times8=72$，∴ $(x-9)(x-8)=0$，∴ $x^2-17x+72=0$，∴ $k=17$. 故答案为 17.

11. 84

思路分析｜一元二次方程中的数字问题

两位数=十位上的数字×10+个位上的数字

$x+4$ ← 设x

个位上的数字的平方 + 十位上的数字的平方 =两位数−4

列出方程→解→验

【解析】设这个两位数的个位上的数字为 x，则十位上的数字为 $x+4$. 根据题意，得 $x^2+(x+4)^2=[10(x+4)+x]-4$. 整理，得 $2x^2-3x-20=0$，解得 $x_1=4$，$x_2=-2.5$. 又∵ x 为非负整数，∴ $x=4$，∴ $10(x+4)+x=10\times(4+4)+4=84$. 故答案为 84.

12. -3 【解析】由题意，可知 $m+n=2a$，$mn=2$，∴ 原式 $=(m-1)^2+(n-1)^2+2(m-1)(n-1)-2(m-1)(n-1)=(m-1+n-1)^2-2(m-1)(n-1)=(2a-2)^2-2(mn-m-n+1)=(2a-2)^2-2(2-2a+1)=4a^2-4a-2=4(a^2-a)-2=4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-3$. ∵ $4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2\geqslant0$，∴ $4\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-3\geqslant-3$. 故最小值为 -3.

13. $m=1$ 或 $m>2$ 【解析】当 $1-m^2=0$ 时，$m=\pm1$. 当 $m=1$ 时，可得 $2x-1=0$，$x=\frac{1}{2}$，符合题意；当 $m=-1$ 时，可得 $-2x-1=0$，$x=-\frac{1}{2}$，不符合题意. 当 $1-m^2\neq0$ 时，$(1-m^2)x^2+2mx-1=0$，$[(1+m)x-1][(1-m)x+1]=0$，∴ $x_1=\frac{1}{1+m}$，$x_2=\frac{-1}{1-m}$. ∵ 关于 x 的方程 $(1-m^2)x^2+2mx-1=0$ 的所有根都是比 1 小的正实数，∴ $0<\frac{1}{1+m}<1$，解得 $m>0$；$0<\frac{-1}{1-m}<1$，解得 $m>2$，∴ $m>2$. 综上可得，实数 m 的取值范围是 $m=1$ 或 $m>2$. 故答案为 $m=1$ 或 $m>2$.

思路分析 分 $1-m^2=0$ 和 $1-m^2\neq0$ 两种情况求出原方程的实数根，再根据原方程的根都是比 1 小的正实数列出不等式，求出 m 的取值范围.

14.【解】(1) $4(x+1)^2=36$，$(x+1)^2=9$，∴ $x+1=\pm3$，∴ $x_1=2$，$x_2=-4$.

(2) $x^2-2x+8=0$. ∵ $\Delta=b^2-4ac=4-4\times1\times8=-28<0$，∴ 原方程无解.

(3) $(y+3)(y-1)=2$，$y^2+2y-5=0$，$y^2+2y+1=6$，即 $(y+1)^2=6$，∴ $y+1=\pm\sqrt{6}$，∴ $y_1=-1+\sqrt{6}$，$y_2=-1-\sqrt{6}$.

(4) $2x^2-2\sqrt{2}x+1=0$，$(\sqrt{2}x-1)^2=0$，∴ $\sqrt{2}x-1=0$，∴ $x_1=x_2=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

15.【解】(1) 当 $k=4$ 时，方程化为 $4x^2+5x+1=0$，∴ $(4x+1)(x+1)=0$，∴ $x_1=-\frac{1}{4}$，$x_2=-1$.

(2) 当 $k=0$ 时，方程化为 $x=0$，方程有实数根；当 $k\neq0$ 时，根据题意得 $\Delta=(k+1)^2-4k\times\frac{k}{4}\geqslant0$，解得 $k\geqslant-\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$.

综上所述，k 的取值范围为 $k\geqslant-\frac{1}{2}$.

易错警示 (2) 注意分为 $k=0$ 和 $k\neq0$ 两种情况讨论.

(3) 不存在. 理由：设方程的两根分别为 a，b. 根据根与系数的关系得 $a+b=-\frac{k+1}{k}$，$ab=\frac{1}{4}$. ∵ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=1$，即 $\frac{a+b}{ab}=1$，∴ $a+b=ab$，∴ $-\frac{k+1}{k}=\frac{1}{4}$，解得 $k=-\frac{4}{5}$. ∵ $k\geqslant-\frac{1}{2}$ 且 $k\neq0$，∴ 不存在实数 k，使方程两根的倒数之和为 1.

16.【解】(1) 设第二天、第三天日销售利润的平均增长率为 x. 根据题意得 $(70-50)\times80(1+x)^2=2\ 500$，解得 $x_1=\frac{1}{4}=25\%$，$x_2=-\frac{9}{4}$（不符合题意，舍去）.

答：第二天、第三天日销售利润的平均增长率为 25%.

(2) 设应降价 y 元/箱，则售价为 $(70-y)$ 元/箱，日销售量为 $(80+10y)$ 箱.

根据题意得 $(70-50-y)(80+10y)=1\ 950$，整理得 $y^2-12y+35=0$，解得 $y_1=5$，$y_2=7$. 当 $y=5$ 时，$70-y=70-5=65$；当 $y=7$ 时，$70-y=70-7=63$.

答：售价应定为 65 元/箱或 63 元/箱.

17.【解】(1) x 的取值范围为 $5\leqslant x\leqslant12$.

(2) 根据题意得 $(300-2x)(200-4x)=44\ 800$，整理得 $x^2-200x+1\ 900=0$，解得 $x_1=10$，$x_2=190$（舍去）. ∵ $x=10$ 在 $5\leqslant x\leqslant12$ 的